

TMA4245 – Parallell 1

Geir-Arne Fuglstad, IMF

13. januar

Plan

- Referansegruppe?
- Oversikt over hovedtemaene denne uken
- Eksempler for å illustrere viktige poenger

Additive regler for sannsynlighet

Teorem/resultat:

For hendelser A, B i utfallsrommet S gjelder

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A') = 1 - P(A)$

Betinget sannsynlighet

Definisjon:

For to hendelser A, B i utfallsrommet S er **den betingede sannsynligheten** til B gitt A definert ved

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ for } P(B) > 0.$$

Teorem/resultat:

For to hendelser A, B i utfallsrommet S gjelder

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Definisjon:

To hendelser A, B i utfallsrommet S er **uavhengige** hvis

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Hvis $P(B) > 0$ er dette det samme som $P(A|B) = P(A)$, og hvis $P(A) > 0$ er dette det samme som $P(B|A) = P(B)$.

Setning om total sannsynlighet og Bayes' regel

Teorem/resultat:

La hendelsene $B_1, \dots, B_k$ være en partisjon av utfallsrommet S . For hendelsen A gjelder da

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i).$$

Hvis $P(B_i) > 0$ for $i = 1, \dots, k$ kan vi skrive

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i).$$

Teorem/resultat (Bayes' regel):

For hendelser A, B i utfallsrommet S gjelder

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \text{ når } P(B) > 0.$$

Stokastiske variabler

Definisjon:

En **stokastisk variabel** X er en reell funksjon på utfallsrommet S .

Definisjon:

Den **kumulative fordelingsfunksjonen (cdf)** til X er gitt ved

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ for } x \in \mathbb{R}.$$

Definisjon:

- Vi kaller X **kontinuerlig** hvis F er (absolutt) kontinuerlig. Funksjonen $f(x) = F'(x)$ kalles **sannsynlighetstettheten (pdf)** til X , og vi tillater at den ikke er definert i enkelte punkter.
- Vi kaller X **diskret** hvis F er en trappefunksjon. Funksjonen f som beskriver størrelsene av hoppene $f(x)$ kalles en **punktsannsynlighet (pmf)**.

Sannsynlighetstettheter og punktsannsynligheter

Teorem/resultat:

En funksjon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en gyldig sannsynlighetstetthet hvis og bare hvis

- $f(x) \geq 0$ for $x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Sannsynligheter regnes ut ved $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$ for alle $a < b$.

Teorem/resultat:

En funksjon $f: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ er en gyldig punktsannsynlighet hvis og bare hvis

- $f(x) \geq 0$ for $x = x_1, x_2, \dots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Sannsynligheter regnes ut ved $P(X = x_i) = f(x_i)$ for $i = 1, 2, \dots$

I begge tilfeller skriver vi $X \sim f(x)$.

Simultanfordelinger og betingede fordelinger

Definisjon:

To stokastiske variabler X og Y har **simultanfordeling** gitt ved

- Sannsynlighetstetthet $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ slik at

$$P\left((X, Y)^T \in A\right) = \int \int_A f(x, y) dx dy$$

for $A \subset \mathbb{R}^2$ hvis X og Y er kontinuerlige.

- Punktsannsynlighet $f: \{x_1, \dots\} \times \{y_1, \dots\} \rightarrow [0, \infty)$ slik at

$$P\left((X, Y)^T \in A\right) = \sum \sum_A f(x, y)$$

for $A \subset \{x_1, \dots\} \times \{y_1, \dots\}$ hvis X og Y er diskrete.

Marginalfordeling og betinget fordeling

Kom til plenumsregning for å se eksempler på dette!

Definisjon:

For to kontinuerlige stokastiske variabler X og Y er

- **marginalfordelingen** til X gitt ved $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$
- **marginalfordelingen** til Y gitt ved $f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

Definisjon:

For to kontinuerlige stokastiske variabler X og Y er **den betingede fordelingen** til Y gitt $X = x$ definert ved

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \text{ for } y \in \mathbb{R} \text{ hvis } f(x) > 0.$$

Definisjon:

To kontinuerlige stokastiske variabler X og Y er **uavhengige** hvis

$$f(x, y) = f(x)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

NB: For diskrete variabler bytter man alle integraler til summer og ser bare på lovlige verdier $\{x_1, \dots\}$ og $\{y_1, \dots\}$, men ellers er alt likt!