

TMA4245 – Parallel 1

Geir-Arne Fuglstad, IMF

20. januar

Forventningsverdi og varians

Teorem:

For en stokastisk variabel $X \sim f(x)$ og reell funksjon g er **forventningsverdien**

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)f(x), & X \text{ diskret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X \text{ kont.} \end{cases}$$

Teorem:

For en stokastisk variabel $X \sim f(x)$ og reell funksjon g er **variansen**

$$\text{Var}[g(X)] = E[(g(X) - E[g(X)])^2],$$

og **standardavviket** er

$$\text{SD}[g(X)] = \sqrt{\text{Var}[g(X)]}.$$

Flere stokastiske variabler

Dette resultatet utvider seg også på en naturlig måte for flere stokastiske variabler.

F.eks. for X og Y med simultanfordeling $f(x, y)$ og en funksjon $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er

$$E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y), & X \text{ og } Y \text{ diskrete,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy, & X \text{ og } Y \text{ kont.} \end{cases}$$

Monte Carlo

Anta at vi har en stokastisk variabel X og en reell funksjon g . Da er $g(X)$ en ny stokastisk variabel.

Første steg i å forstå oppførselen til $g(X)$ er å bestemme forventningsverdi og varians/standardavvik, men de kan være vanskelige å regne ut analytisk.

De kan i stedet approksimeres ved

- Steg 1: Simuler n uavhengige tall $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra fordelingen til X
- Steg 2: Regn ut

$$E[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \overline{g(x)}$$

- Steg 3: Regn ut

$$\text{Var}[g(X)] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - \overline{g(x)})^2$$

NB: Disse kalles mer presist **estimator** som vi diskuterer i del 2 av kurset.

Eksempel: Tilnærming til π

Tallet π er arealet av en sirkel med radius 1. Det vil si at

$$\pi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(x, y) dx dy$$

der

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Eksempel: Tilnærming til π

Det vil si at hvis X og Y er uavhengige fra $\text{Unif}[-1,1]$ så er

$$E[g(X, Y)] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(x, y) f(x, y) dx dy = \pi/4$$

fordi

$$f(x, y) = \frac{1}{4}, \quad -1 < x, y < 1.$$

Altså har vi

$$\pi = 4E[g(X, Y)].$$

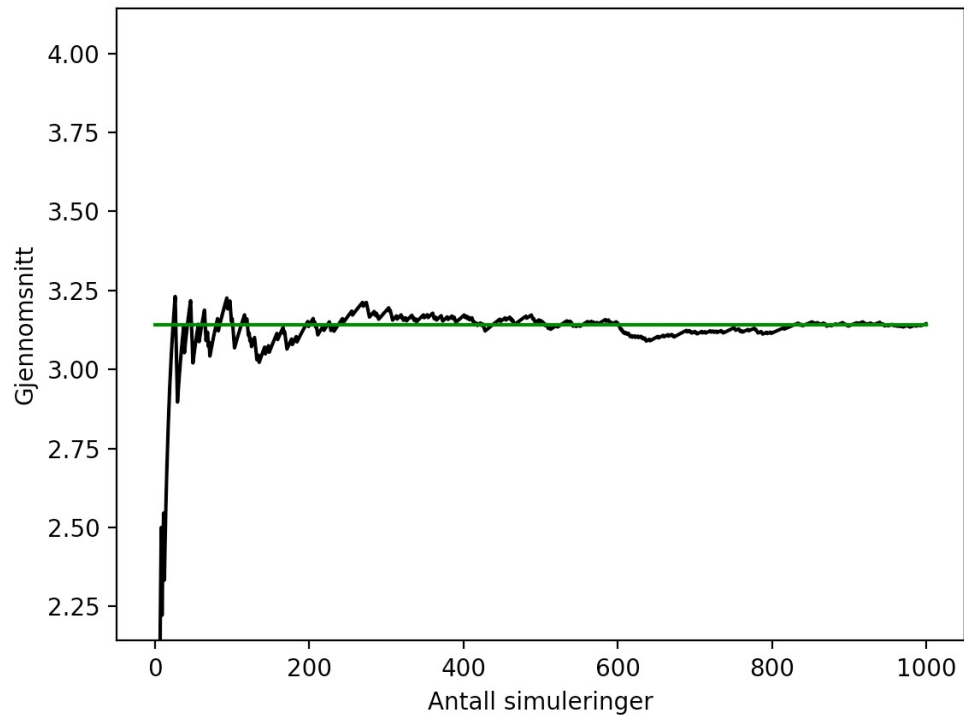
Eksempel: Tilnærming til π

Velg et passende antall simuleringer N , og gjør følgende:

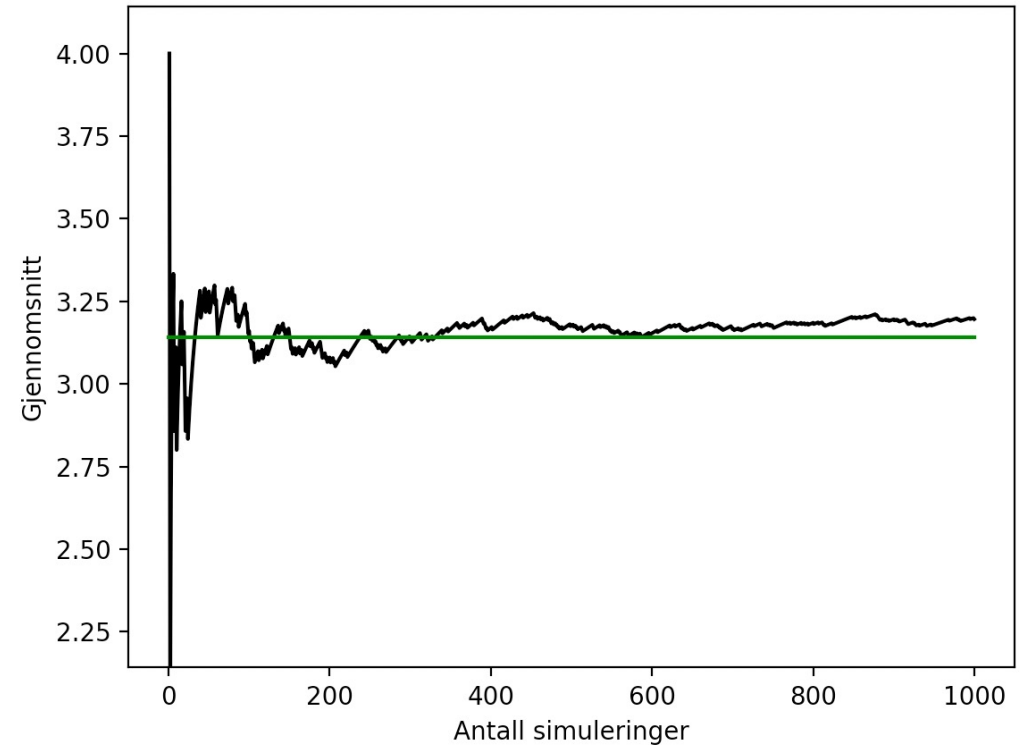
1. For $r = 1, \dots, N$
 2. Simuler uavhengige tall x og y fra $\text{Unif}[-1,1]$
 3. Hvis $x^2 + y^2 \leq 1$
 4. $y_r = 1$
 5. Ellers
 6. $y_r = 0$
7. End
8. Regn ut $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N y_r$
9. Approksimasjonen av π er $4\bar{y}$

Eksempel: Tilnærming til π

Seed = 1324



Seed = 4324



Horisontal grønn linje er π

Stokastisk simulering ved invers cdf

Vi har en stokastisk variabel X med kumulativ fordelingsfunksjon $F(x)$.

For å simulere uavhengige verdier $x_1, x_2, \dots, x_n$ av X gjør vi

- Steg 1: Simuler n uavhengige tall $u_1, u_2, \dots, u_n$ fra fordelingen $\text{Unif}[0,1]$.
- Steg 2: Regn ut $x_i = \min_{x \in \mathbb{R}} \{x: F(x) \geq u_i\}$ for $i = 1, \dots, n$.