

Plenumsregning – Uke 13

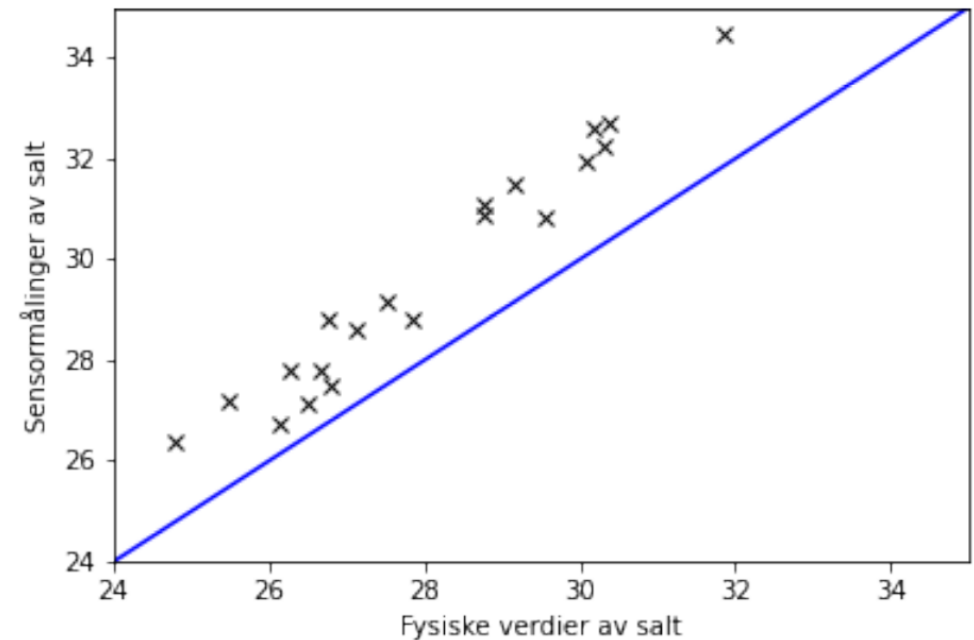
Geir-Arne Fuglstad, IMF

Høst 2024 – Oppgave 4 (forkortet tekst og oppgave)

Vi har sensormåling (y_i) og resultat fra fysisk modell (x_i) for saltinnhold ved lokasjoner $i = 1, \dots, n$ i Trondheimsfjorden. Regresjonsmodellen $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, er foreslått der vi antar $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \sim_{\text{iid}} N(0, \sigma^2)$. De $n = 20$ målingene i figuren gir $\bar{x} = 28.0$, $\bar{y} = 29.6$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 64.6$ og $S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 77.2$.

a)

- Regn ut estimatene for α og β



Heltrukken, blå linje er $y = x$

Høst 2023 – Oppgave 4 (forkortet tekst)

Vi antar en regresjonsmodell $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$, der residualene $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \sim_{\text{iid}} N(0, \sigma^2)$. Parameterene β og σ^2 er ukjente. Følgende estimatorer for β er foreslått:

$$\beta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i} \quad \text{og} \quad \tilde{\tilde{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Vi har $n = 31$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 193.3769$ og $\sum_{i=1}^n 1/x_i^2 = 13.5248$.

a) Hvilken estimator er best?

Høst 2023 – Oppgave 4 (forkortet tekst)

Vi antar regresjonsmodell $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, der residualene $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \sim_{\text{iid}} N(0, \sigma^2)$. Parameterene β og σ^2 er ukjente. Følgende estimatorer for β er foreslått:

$$\beta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i} \quad \text{og} \quad \tilde{\tilde{\beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

b)

- Utled sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene $\hat{\beta}$ og $\hat{\sigma}^2$.
- Vis at $\hat{\beta}$ er identisk med en av de tre estimatorene over.
- Vis at $\hat{\sigma}^2$ kan skrives på formen

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} x_i)^2.$$

Høst 2023 – Oppgave 4 (forkortet tekst)

Vi antar regresjonsmodell $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, der residualene $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \sim_{\text{iid}} N(0, \sigma^2)$. Parameterene β og σ^2 er ukjente. Vi har så langt vist at SME er

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta} x_i)^2.$$

c)

- Begrunn at $\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \beta x_i)^2}{\sigma^2}$ er kjikvadrat-fordelt med n frihetsgrader.
- Gi et kort argument basert på dette for at $\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{\beta} x_i)^2}{\sigma^2}$ er kjikvadrat-fordelt med $n - 1$ frihetsgrader. Du trenger bare et argument for resultatet og ingen bevis.
- Bevis at $\hat{\sigma}^2$ er forventningskjev.
- Foreslå en forventningsrett estimator, og vis at den er forventningsrett.

Ekstra

Anta vi har verdier $x_1, \dots, x_n$ og så genereres y -verdier fra en modell

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

der α og β er ukjente konstanter, og $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \sim_{\text{iid}} \text{Gamma}\left(\frac{1}{\sigma^2}, \sigma^2\right)$ for en ukjent konstant $\sigma^2 > 0$.

- Er $\hat{B} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ forventningsrett for β ?
- Er $\hat{A} = \bar{Y} - \hat{B} \bar{x}$ forventningsrett for α ? Hvis ikke foreslå en korrigert estimator $\tilde{A}$ som er forventningsrett.