

Plenumsregning – Uke 15

Geir-Arne Fuglstad, IMF

Repetisjon 1

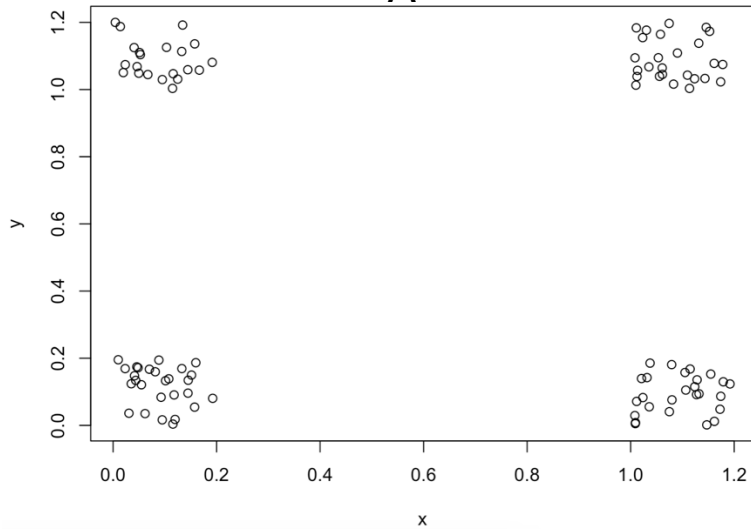
La

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

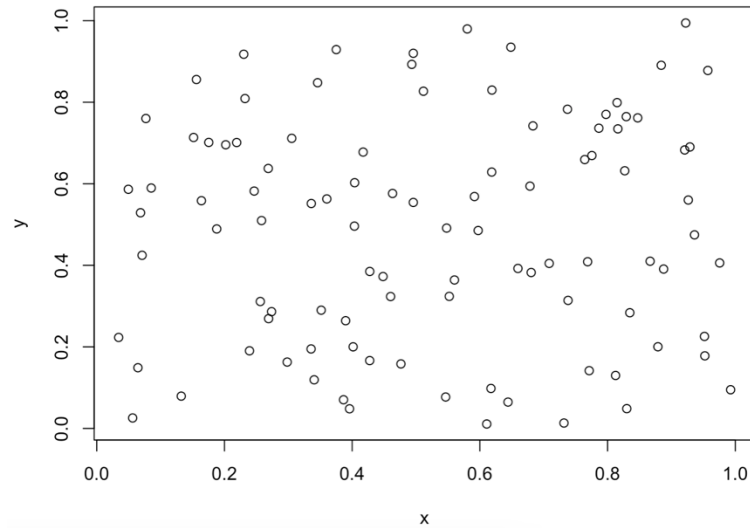
- a) Er dette en gyldig simultan sannsynlighetstetthet?
- b) Regn ut $P(Y \leq 0.5)$, $P(\{X \leq 0.5\} \cap \{Y \leq 0.5\})$ og $P(\{X \leq 0.5\} \cup \{Y \leq 0.5\})$.
- c) Skisser hendelsene $A = \{X \leq 0.5\}$ og $B = \{Y \leq 0.5\}$ i et venndiagram. Er de disjunkte? Er de uavhengige?
- d) Bestem sannsynlighetstettheten til X betinget på $Y = y$ (for $0 < y < 1$).

Repetisjon 2

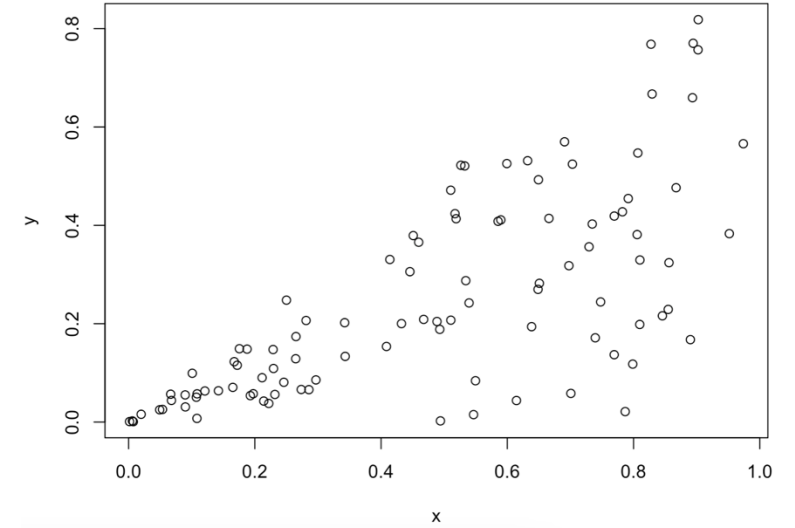
A



B



C



Del 1:

- a) Hvilke virker uavhengige?
- b) Hvilke virker korrelerte?

Del 2:

- a) Skisser marginalfordelingen til X i hvert tilfelle.
- b) Anslå forventningsverdien til X .

Repetisjon 3

Anta $U \sim \text{Unif}(-1,2)$ og la $X = U^2$.

- a) Bestem kumulativ fordelingsfunksjon for X
- b) Bestem sannsynlighetstetthet for X
- c) Bestem medianen til X

Repetisjon 4

Vi gjør et tilfeldig utvalg $X_1, X_2, \dots, X_n$ fra en Bernoulli(p)-populasjon.

- a) Foreslå en estimator for p og forklar hvordan fordelingen til estimatoren kan tilnærmes med sentralgrenseteoremet.
- b) Under denne tilnærmingen skriv opp et 90% konfidensintervall for p , og diskuter hva konsekvensen er av å bruke sentralgrenseteoremet i stedet for eksakt fordeling.
- c) Vi skal gjøre et nytt tilfeldig utvalg $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ fra Bernoulli(p)-populasjonen. Foreslå passende tilnærminger, og lag et tilnærmet 90% prediksjonsintervall for antall suksesser ($Y = Y_1 + \dots + Y_m$).

Repetisjon 5

Anta et tilfeldig utvalg $X_1, X_2, \dots, X_n$ fra en $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjon. Bestem hvilke utsagn som er **sanne**.

- a) $\bar{x} \pm z_{0.05}\sigma/\sqrt{n}$ er et 90% konfidensintervall for μ .
- b) $\bar{x} \pm z_{0.05}s/\sqrt{n}$ er et 90% konfidensintervall for μ .
- c) Hvis μ_0 ikke er inneholdt i 90% konfidensintervallet for μ kan vi forkaste $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$ på signifikansnivå 0.10.
- d) For en hypotesetest for $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_1: \mu \neq \mu_0$, forventer vi samme styrke for en test basert på $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ og en test basert på $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$.
- e) Konfidensintervall for μ er robust til antagelsen om normalpopulasjon.
- f) Konfidensintervall for σ^2 er robust til antagelsen om normalpopulasjon.
- g) I hypotesetester for μ og σ^2 kan vi oppnå vilkårlig høy styrke for ethvert signifikansnivå ved å velge n stor nok.

Repetisjon 6

Anta at vi har en enkel lineær regresjon modell med standard antagelser, varians σ^2 , og standard estimatorer $\hat{A}$ for α og $\hat{B}$ for β . Definer

$$a) \quad T_1 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha - \beta x_i)^2}{\sigma^2}$$

$$b) \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{A} - \beta x_i)^2}{\sigma^2}$$

$$c) \quad T_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \alpha - \hat{B} x_i)^2}{\sigma^2}$$

$$d) \quad T_4 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{A} - \hat{B} x_i)^2}{\sigma^2}$$

1. Hvilke fordelinger har disse stokastiske variablene?
2. Beskriv hvordan vi kan lage forventningsrette estimatorer for σ^2 fra hver av de stokastiske variablene.
3. Hvilke av estimatorene er uavhengige av $\hat{A}$ og $\hat{B}$?